§5. Обоснование метода Фурье для одномерного уравнения теплопроводности (основные принципы)

I) Корректность полученного разложения на примере простейшей задачи с краевыми условиями 1-го рода.

Рассм. простейшую задачу:

$$(1)\ \begin{cases} u_t = u_{xx}, & 0<x<\pi,\ t>0, \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0, \\ u(x,0) = \varphi(x). \end{cases}$$

Её решение по методу Фурье имеет вид:

$$(1.1)\quad u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k e^{-k^2 t} \sin kx, \text{ где } A_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \varphi(x)\sin kx\,dx.$$

Теор. Пусть $\varphi \in C^1[0,\pi]$, причем $\varphi(0)=\varphi(\pi)=0$. Тогда ряд (1.1) определяет ф-цию $u(x,t)$ из класса $C([0,\pi]\times[0,\infty)) \cap C^{2,1}([0,\pi]\times(0,\infty))$, удовлетворяющую всем соотношениям в з. (1) (т.е. (1.1) есть подлинное решение з. (1)).

Предварительная лемма из теории рядов Фурье.

Пусть $\varphi\in C^1[0,\pi]$, причем $\varphi(0)=\varphi(\pi)=0$. Пусть $A_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\varphi(x)\sin kx\,dx$, $k\in\mathbb{N}$.
Тогда $\sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin kx = \varphi(x)$ на $[0,\pi]$ и ряд сходится к $\varphi(x)$ абсолютно и равномерно на $[0,\pi]$, $\sum_{k=1}^{\infty}|A_k| < \infty$.

Док-во леммы. $A_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\varphi(x)\sin kx\,dx = -\frac{2}{\pi k}\int_0^{\pi}\varphi(x)\,d\cos kx = \frac{2}{\pi k}\int_0^{\pi}\varphi'(x)\cos kx\,dx = \frac{1}{k}B'_k$,

где $B'_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\varphi'(x)\cos kx\,dx$, $\varphi'\in C[0,\pi]$.

$$A_k = \frac{1}{k}B'_k \Rightarrow |A_k| = \left|\frac{1}{k}B'_k\right| \le \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k^2} + |B'_k|^2\right).$$

(Используется элементарное нер-во: $2|\alpha\beta| \le \alpha^2+\beta^2$ для $\forall\,\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.)

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty}|A_k| \le \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} + \sum_{k=1}^{\infty}|B'_k|^2\right) < \infty, \text{ ибо } \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6} \text{ (ряд Эйлера)}$$

и $\sum_{k=1}^{\infty}|B'_k|^2 < \infty$ – нер-во Бесселя для коэфф. Фурье от непрерывной ф-ции.

Итак, $\sum_{k=1}^{\infty}|A_k|<\infty$ и ряд $\sum_{k=1}^{\infty}A_k \sin kx$ сходится абсолютно и равномерно (по признаку Вейерштрасса). Пусть $S(x)\equiv\sum_{k=1}^{\infty}A_k\sin kx$ - его сумма, $S\in C[0,\pi]$.

Тогда $(S(x)-\varphi(x))\perp \sin mx$ на $[0,\pi]$ для $\forall m\in\mathbb{N}$, ибо

$$\int_0^{\pi}(S(x)-\varphi(x))\sin mx\,dx=\int_0^{\pi}\Big(\sum_{k=1}^{\infty}A_k\sin kx\Big)\sin mx\,dx-\int_0^{\pi}\varphi(x)\sin mx\,dx=\frac{\pi}{2}A_m-\frac{\pi}{2}A_m=0.$$

$\Rightarrow S(x)-\varphi(x)\equiv 0$ на $[0,\pi]$ из полноты системы $\{\sin mx\}_{m=1}^{\infty}$. $\Rightarrow$

$\varphi(x)=\sum_{k=1}^{\infty}A_k\sin kx$, где ряд сходится абсолютно и равномерно на $[0,\pi]$. $\square$

Док-во теоремы. По лемме $\sum_{k=1}^{\infty}|A_k|<\infty$. $\Rightarrow$ ряд (1.1) мажорируется в $[0,\pi]\times[0,\infty)$ абс. сходящимся числовым рядом и, значит, сходится абс. и равномерно на $[0,\pi]\times[0,\infty)$ к непрерывной ф-ции $u(x,t)$. При этом

$$u(0,t)=\sum_{k=1}^{\infty}A_k e^{-k^2t}\sin(k\cdot 0)=\sum_{k=1}^{\infty}0=0 \quad \text{при } t\geq 0;$$

$$u(\pi,t)=\sum_{k=1}^{\infty}A_k e^{-k^2t}\sin(k\pi)=\sum_{k=1}^{\infty}0=0 \quad \text{при } t\geq 0;$$

$$u(x,0)=\sum_{k=1}^{\infty}A_k\cdot 1\cdot\sin k\varphi=\varphi(x) \quad \text{при } 0\leq x\leq\pi.$$

Рассмотрим „продифференцированный" ряд (1.1). Пусть $t\geq\varepsilon>0$, где ε - фикс. число. Тогда:

а) для $\frac{\partial^m}{\partial x^m}\Rightarrow\sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{\partial^m}{\partial x^m}\left(A_k e^{-k^2t}\sin kx\right)\right|\leq\sum_{k=1}^{\infty}|A_k|\cdot e^{-k^2\varepsilon}\cdot k^m<\infty,$

б) для $\frac{\partial^j}{\partial t^j}\Rightarrow\sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{\partial^j}{\partial t^j}\left(A_k e^{-k^2t}\sin kx\right)\right|\leq\sum_{k=1}^{\infty}|A_k|\cdot k^{2j}\cdot e^{-k^2\varepsilon}<\infty.$

Сходимость числовых рядов проверяется по признаку Даламбера. Аналогичные оценки получаются для смешанных производных $\frac{\partial^{m+j}}{\partial t^j\partial x^m}$. Итак, ряд составленный из производных $\forall$ порядка от членов ряда (1.1) сх. абсолютно и равномерно на мн-ве $[0,\pi]\times[\varepsilon,+\infty)$.

$\Rightarrow$ ф-ция $u(x,t)$ обладает произв. $\forall$ порядка на $[0,\pi]\times[\varepsilon,+\infty)$ и эти производные можно получать почленным дифференцированием ряда (1.1).

Но $\varepsilon>0$ - произвольно. $\Rightarrow u\in C^\infty([0,\pi]\times(0,\infty))$, причем

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\sum_{k=1}^\infty A_k\left(-k^2e^{-k^2t}\right)\sin kx,\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\sum_{k=1}^\infty A_k e^{-k^2t}\left(-k^2\sin kx\right).\Rightarrow$$

$u_t=u_{xx}$ при $0\le x\le\pi$, $t>0$. $\square$

NB Фактически мы показали, что $u\in C([0,\pi]\times[0,\infty))\cap C^\infty([0,\pi]\times(0,\infty))$, т.е. при $t>0$ решение (1.1) оказывается бесконечно дифференцируемым (за счет сглаживающих свойств коэфф. e^{-k^2t}). Подобный эффект всегда наблюдается в решениях ур-я теплопроводности.

Вывод: формула (1.1) действительно определяет решение з. (1).

Вопрос: но может быть у задачи есть другие решения, отличные от (1.1)? Тогда физическая сущность метода Фурье окажется под вопросом.

Покажем, что это не так — решение единственно, причем рассмотрим сразу самую общую ситуацию.

II) Единственность решения в классической смешанной задаче для ур-я теплопроводности

Рассм. классическую краевую задачу

$$(2)\quad\begin{cases} u_t=a^2u_{xx}+f(x,t), & 0<x<l,\ t>0,\\ \Gamma_0(u)=\mu_0(t),\ \Gamma_l(u)=\mu_1(t), \\ u(x,0)=\varphi(x). \end{cases}\qquad u=u(x,t)=?$$

Теор. Задача (2) с заданными $f(x,t)$, $\mu_0(t)$, $\mu_1(t)$, $\varphi(x)$ может иметь не более одного решения в классе $C([0,l]\times[0,\infty))\cap C^{2,1}([0,l]\times(0,\infty))$.

Док-во. Допустим, что есть два решения $u^{(1)}(x,t)$ и $u^{(2)}(x,t)$ из указанного класса. Пусть $v(x,t)\equiv u^{(1)}(x,t)-u^{(2)}(x,t)$. Тогда

$$(2.0)\quad\begin{cases} v_t=a^2v_{xx}, & 0<x<l,\ t>0\\ \Gamma_0(v)=\Gamma_l(v)=0, \\ v(x,0)=0, \end{cases}$$

т.е. $v(x,t)$ есть решение однородной задачи (2.0).

(Действ.,

$$v_t = \frac{\partial}{\partial t}\left(u^{(1)} - u^{(2)}\right) = u^{(1)}_t - u^{(2)}_t = \left(a^2 u^{(1)}_{xx} + f(x,t)\right) - \left(a^2 u^{(2)}_{xx} + f(x,t)\right) =$$

$$= a^2\left(u^{(1)}_{xx} - u^{(2)}_{xx}\right) = a^2 v_{xx} \quad \text{и т.д.)}$$

Пусть $F(t) \equiv \frac{1}{2a^2}\int_0^l v^2(x,t)\,dx$, $t \geq 0$. Тогда $F \in C([0,\infty)) \cap C^1((0,\infty))$, причем

$$F'(t) = \frac{1}{a^2}\int_0^l v(x,t)\,v_t(x,t)\,dx = \int_0^l v(x,t)\,v_{xx}(x,t)\,dx = v(x,t)\,v_x(x,t)\Big|_0^l - \int_0^l \left(v_x(x,t)\right)^2 dx \leq$$

$$\leq v(l,t)\,v_x(l,t) - v(0,t)\,v_x(0,t) \leq 0 \quad \text{при } t > 0.$$

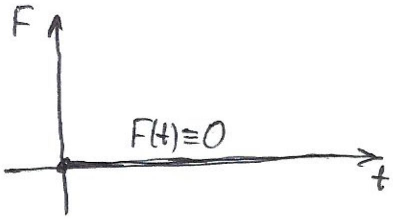
(Использована лемма о диссипативности: $\psi \in C^1[0,l]$, $\Gamma_0(\psi) = \Gamma_l(\psi) = 0 \Rightarrow \psi(0)\psi'(0) - \psi(l)\psi'(l) \geq 0$)

Итак,

а) $F(t) \geq 0$ при $t \geq 0$;

б) $F(0) = \frac{1}{2a^2}\int_0^l v^2(x,0)\,dx = 0$;

в) $F'(t) \leq 0$ при $t > 0$, т.е. $F(t)$ не возрастает при $t > 0$.



а), б), в) $\Rightarrow F(t) \equiv 0$ при $t \geq 0$. $\Rightarrow \int_0^l v^2(x,t)\,dx \equiv 0$ при $t \geq 0$. $\Rightarrow$

$v(x,t) \equiv 0$ на $[0,\pi]\times[0,\infty)$. $\Rightarrow u^{(1)}(x,t) \equiv u^{(2)}(x,t)$. $\square$

Другими словами, если есть два решения, то они совпадают.

Таким образом, в любой классической краевой задаче решение единственно.

Метод Фурье полностью обоснован.

Упражнение. Аналогичным методом доказать единственность решения первой смешанной задачи для ур-я колебаний:

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x,t), & 0 < x < l,\ t > 0, \\ u(0,t) = \mu_0(t), & u(l,t) = \mu_1(t). \\ u(x,0) = \varphi(x), & u_t(x,0) = \psi(x). \end{cases}$$

Чётко выделить класс, в котором доказана единственность решения.

Покажем теперь, что в вопросе единственности решения возможен принципиально иной подход, основанный на принципе экстремума.